JACQUES DIXMIER

Sur les structures boréliennes du spectre d'une C^*-algèbre

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 6 (1960), p. 5-11
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1960__6__5_0>

SUR LES STRUCTURES BORÉLIENNES DU SPECTRE D'UNE C^*-ALGÈBRE

par JACQUES DIXMIER

Dans la classification des C^*-algèbres, on est amené à étudier certaines catégories de C^*-algèbres particulièrement intéressantes :

1) Les GCR-algèbres au sens de Kaplansky [6], autrement dit les C^*-algèbres admettant une suite de composition à quotients CCR ;

2) Les C^*-algèbres A dont le spectre $\hat{A}$ (ensemble des classes de représentations irréductibles de A muni d'une certaine topologie, cf. [4]) est un T_0-espace ;

3) Les C^*-algèbres A de spectre lisse (= smooth dual, cf. [9]), c'est-à-dire telles que la structure borélienne définie par Mackey sur $\hat{A}$ soit dénombrablement séparée ;

4) Les C^*-algèbres de type I, c'est-à-dire celles dont toutes les représentations factorielles sont de type I.

Limitons-nous désormais aux C^*-algèbres séparables (bien que certaines des implications ci-dessous ne nécessitent pas cette hypothèse). Kaplansky a montré [6] qu'une GCR-algèbre est de type I. Fell prouva ensuite que : 1) Si A est GCR, $\hat{A}$ est un T_0-espace [5] ; 2) Si $\hat{A}$ est un T_0-espace, A est de type I (son raisonnement est signalé en remarque dans [3]), et $\hat{A}$ est lisse [5]. Enfin, j'ai prouvé dans [3] que, si $\hat{A}$ est un T_0-espace, A est GCR. La situation est résumée par le diagramme suivant :

$$\text{A GCR} \Leftrightarrow \hat{A}\ T_0\text{-espace} \begin{array}{l} \nearrow \hat{A} \text{ lisse} \\ \searrow \text{A de type I} \end{array}$$

Dans ce mémoire, nous montrerons que, si $\hat{A}$ est lisse, $\hat{A}$ est un T_0-espace. Nous aurons donc prouvé une partie de la conjecture de Mackey [9] selon laquelle $\hat{A}$ est lisse si, et seulement si, A est de type I.

Soit A une C^*-algèbre séparable. Rappelons quelques points concernant la topologie et la structure borélienne de $\hat{A}$. Soit H un espace hilbertien séparable. Soit $\mathscr{R}_H(A)$ l'ensemble des représentations de A dans H, c'est-à-dire des applications linéaires π de A dans $\mathscr{L}(H)$ (ensemble des opérateurs linéaires continus dans H) telles que $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$ et $\pi(x^*) = \pi(x)^*$ quels que soient $x, y \in A$. On sait qu'on a $||\pi(x)|| \leqslant ||x||$ quel que soit $x \in A$. Munissons $\mathscr{R}_H(A)$ de la topologie de la convergence simple forte, c'est-à-dire de la topologie la moins fine pour laquelle les applications $\pi \to \pi(x)\xi$ de $\mathscr{R}_H(A)$ dans H ($x \in A$, $\xi \in H$) sont continues. Cette topologie est identique à la topologie de la convergence simple faible, en vertu de l'égalité

$$||\pi(x)\xi - \pi_0(x)\xi||^2 = (\pi(x^*x)\xi\,|\,\xi) - 2\ \mathrm{R}e(\pi(x)\xi\,|\,\pi_0(x)\xi) + ||\pi_0(x)\xi||^2.$$

Soit $\mathscr{I}_{\mathrm{H}}(\mathrm{A})$ le sous-ensemble de $\mathscr{R}_{\mathrm{H}}(\mathrm{A})$ formé des représentations irréductibles non triviales de A dans H. La topologie précédente induit sur $\mathscr{I}_{\mathrm{H}}(\mathrm{A})$ une topologie $\mathscr{T}$. Soit $\mathscr{B}$ la structure borélienne sur $\mathscr{I}_{\mathrm{H}}(\mathrm{A})$ sous-jacente à $\mathscr{T}$. Soit, d'autre part, φ l'application canonique de $\mathscr{I}_{\mathrm{H}}(\mathrm{A})$ dans $\hat{\mathrm{A}}$ qui, à tout élément de $\mathscr{I}_{\mathrm{H}}(\mathrm{A})$, fait correspondre sa classe. L'image $\varphi(\mathscr{I}_{\mathrm{H}}(\mathrm{A}))$ est le sous-ensemble $\hat{\mathrm{A}}_{\mathrm{H}}$ de $\hat{\mathrm{A}}$ formé des classes de représentations irréductibles non triviales de A dont la dimension hilbertienne est égale à celle de H. (Comme A est séparable, $\hat{\mathrm{A}}_{\mathrm{H}}$ n'est non vide que si $\dim \mathrm{H} = 1, 2, \ldots, \aleph_0$.) Ceci posé, la topologie (resp. la structure borélienne de Mackey) induite sur $\hat{\mathrm{A}}_{\mathrm{H}}$ par celle de $\hat{\mathrm{A}}$ n'est autre que la topologie (resp. la structure borélienne) quotient de $\mathscr{T}$ (resp. $\mathscr{B}$) par φ. Mais la structure de Mackey de $\hat{\mathrm{A}}_{\mathrm{H}}$, évidemment plus fine que la structure borélienne sous-jacente à sa topologie, *ne lui est pas en général identique*, car un ensemble borélien de $\mathscr{I}_{\mathrm{H}}(\mathrm{A})$ saturé pour l'équivalence n'est pas toujours déduit par intersection et réunion dénombrable d'ensembles ouverts ou fermés *saturés* ; par exemple, il peut arriver (si les seuls idéaux bilatères fermés de A sont $\{0\}$ et A) que la topologie de $\hat{\mathrm{A}}$ soit la topologie la moins fine, alors que la structure borélienne de Mackey est toujours séparée. Nous avons donc à distinguer sur $\hat{\mathrm{A}}_{\mathrm{H}}$, et plus généralement sur $\hat{\mathrm{A}}$, la structure borélienne de Mackey et la « structure borélienne topologique ».

Il est bon de noter que l'équivalence des représentations définit dans $\mathscr{R}_{\mathrm{H}}(\mathrm{A})$ une relation d'équivalence ouverte ; plus précisément, tout opérateur unitaire U dans H définit un homéomorphisme h_{U} de $\mathscr{R}_{\mathrm{H}}(\mathrm{A})$ sur lui-même, et la relation d'équivalence en question est déduite du groupe des homéomorphismes h_{U} ; de même dans $\mathscr{I}_{\mathrm{H}}(\mathrm{A})$.

Ceci posé, le résultat principal du présent article est le théorème que voici :

THÉORÈME 1. — *Soit* A *une* C^**-algèbre séparable. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) A *est* GCR ;

b) $\hat{\mathrm{A}}$ *est standard ;*

c) La structure borélienne de Mackey sur $\hat{\mathrm{A}}$ *est dénombrablement séparée ;*

d) La structure borélienne de Mackey sur $\hat{\mathrm{A}}$ *est identique à la structure borélienne topologique.*

Le schéma de la démonstration est le suivant :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & b) \arrow[dr, Rightarrow] & & \\ a) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & c) \arrow[r, Rightarrow] & a) \\ & d) \arrow[ur, Rightarrow] & & \end{tikzcd}$$

b) $\Rightarrow$ *c)* est évident.

a) $\Rightarrow$ *d)* résulte de [5].

d) $\Rightarrow$ *c)* : supposons la structure borélienne de Mackey $\mathscr{B}_1$ sur $\hat{\mathrm{A}}$ identique à la structure borélienne topologique $\mathscr{B}_2$. La structure $\mathscr{B}_1$ est séparée [9]. La structure $\mathscr{B}_2$ est dénombrablement engendrée puisque la topologie de $\hat{\mathrm{A}}$ admet une base dénombrable [5]. Donc $\mathscr{B}_1 = \mathscr{B}_2$ est dénombrablement séparée.

a)⇒b) : supposons que A soit GCR. Il existe alors [6] une suite de composition croissante bien ordonnée $(I_\rho)_{\rho\in P}$ de A telle que les $I_{\rho+1}/I_\rho$ soient des CCR-algèbres non nulles dont le spectre est localement compact. Pour tout $\rho\in P$, soit x_ρ un point de $I_{\rho+1}$ dont la distance à I_ρ soit $\geqslant 1$. Si $\rho>\rho'$, on a $\|x_\rho - x_{\rho'}\|\geqslant 1$. Comme A est séparable, P est nécessairement dénombrable. D'autre part, soit U_ρ le spectre de I_ρ, qui s'identifie à une partie ouverte de $\hat{A}$. Les U_ρ forment une famille croissante bien ordonnée pour l'inclusion de parties ouvertes de $\hat{A}$, et l'une de ces parties est $\hat{A}$. Le spectre de $I_{\rho+1}/I_\rho$ s'identifie à $U_{\rho+1}-U_\rho=V_\rho$, et l'espace topologique V_ρ est localement compact à base dénombrable. Les V_ρ sont évidemment deux à deux disjoints. Leur réunion est $\hat{A}$; en effet, soit $\pi\in\hat{A}$; soit ρ le plus petit indice tel que $\pi\in U_\rho$; pour $\sigma<\rho$, on a $\pi\notin U_\sigma$, donc le noyau N de π contient I_σ ; si ρ était un ordinal limite, on en conclurait que $N\supset I_\rho$, d'où $\pi\in U_\rho$, ce qui est absurde ; donc ρ est de la forme $\rho'+1$; et on a $\pi\in V_{\rho'}$. Comme *a)⇒d)*, la structure borélienne de Mackey sur $\hat{A}$ est identique à la structure borélienne topologique ; nous pouvons donc parler de parties boréliennes de $\hat{A}$ sans préciser. Comme P est dénombrable, une partie B de $\hat{A}$ est borélienne si et seulement si les parties $B\cap V_\rho$ sont boréliennes. Donc, l'espace borélien $\hat{A}$ est la somme des espaces boréliens V_ρ. Comme l'espace topologique V_ρ est localement compact à base dénombrable, l'espace borélien V_ρ est standard, donc [9] l'espace borélien $\hat{A}$ est standard.

Il reste à montrer que *c)⇒a)*, ce qui nécessitera plusieurs lemmes.

LEMME 1. — *Soit* H *un espace hilbertien séparable. L'espace topologique* $\mathscr{R}_H(A)$ *est polonais (i.e.* [1] *sa topologie se déduit d'une distance pour laquelle* $\mathscr{R}_H(A)$ *est séparable complet).*

Soit $\mathscr{L}_s(H)$ l'ensemble $\mathscr{L}(H)$ muni de la topologie forte. Il est quasi-complet ([2], chap. III, § 3, cor. 2 du th. 4). Soit $\mathscr{L}_s(A, \mathscr{L}_s(H))$ l'espace des applications linéaires continues de A dans $\mathscr{L}_s(H)$, muni de la topologie de la convergence simple. Toute partie équicontinue et fermée de $\mathscr{L}_s(A, \mathscr{L}_s(H))$ est un sous-espace uniforme complet de $\mathscr{L}_s(A, \mathscr{L}_s(H))$ ([2], chap. III, § 3, th. 4). En particulier, l'ensemble des applications linéaires π de A dans $\mathscr{L}_s(H)$ telles que $\|\pi(x)\|\leqslant\|x\|$ pour tout $x\in A$ est un sous-espace uniforme complet B de $\mathscr{L}_s(A, \mathscr{L}_s(H))$. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une suite totale dans A telle que $\|x_i\|\leqslant 1$ pour tout i. Soit $(\xi_j)_{j\in J}$ une suite totale dans H telle que $\|\xi_j\|\leqslant 1$ pour tout j. La structure uniforme de B admet pour système fondamental d'entourages l'ensemble des entourages définis par les inégalités

$$\|\pi(x_i)\xi_j-\pi'(x_i)\xi_j\|\leqslant\frac{1}{k}\quad(i\in I, j\in J, k=1, 2, \ldots).$$

Cette structure uniforme est donc métrisable. L'application $\pi\to(\pi(x_i)\xi_j)_{i\in I, j\in J}$ de B sur un sous-espace de $H^{I\times J}$ est bicontinue, donc B est séparable. Bref, B, muni de la topologie de la convergence simple forte, est un espace polonais. Enfin, $\mathscr{R}_H(A)$ est l'ensemble des $\pi\in B$ tels que $\pi(xy)=\pi(x)\pi(y)$, $\pi(x^*)=\pi(x)^*$ quels que soient $x, y\in A$. La deuxième condition équivaut à la condition $(\pi(x^*)\xi\,|\,\eta)=(\xi\,|\,\pi(x)\eta)$ quels que soient $x \in \mathrm{A}$, ξ, $\eta \in \mathrm{H}$. On voit donc que $\mathscr{R}_{\mathrm{H}}(\mathrm{A})$ est un sous-espace fermé de B, donc est un espace polonais.

LEMME 2. — *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach séparables*, M *un espace topologique*, $m \to \mathrm{U}_m$ *une application continue de* M *dans* $\mathscr{L}_s(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *(ensemble des applications linéaires continues de* E *dans* F, *muni de la topologie de la convergence simple). Soit* n *un entier. L'ensemble des* $m \in \mathrm{M}$ *tels que* codim $\overline{\mathrm{U}_m(\mathrm{E})} \leqslant n$ *est un* G_δ *de* M.

Il suffit de reprendre la démonstration de [8], p. 202, l. 1-17 du bas, en remplaçant l'assertion « est mesurable » à la l. 11 (resp. 5) du bas, par « est ouvert » (resp. « est un G_δ »).

Soient A une C*-algèbre, H un espace hilbertien, et $\pi, \pi' \in \mathscr{R}_{\mathrm{H}}(\mathrm{A})$. Rappelons qu'on appelle opérateur d'entrelacement de π et π' un élément T de $\mathscr{L}(\mathrm{H})$ tel que $\pi(x)\mathrm{T} = \mathrm{T}\pi'(x)$ quel que soit $x \in \mathrm{A}$. La dimension de l'espace vectoriel des opérateurs d'entrelacement de π et π' s'appelle le nombre d'entrelacement de π et π' et sera noté $\mathscr{E}(\pi, \pi')$.

LEMME 3. — *Soient* A *une* C*-*algèbre séparable*, H *un espace hilbertien séparable, et* M *un espace topologique. Soient* $m \to \pi_m$, $m \to \pi'_m$ *deux applications continues de* M *dans* $\mathscr{R}_{\mathrm{H}}(\mathrm{A})$. *Soit* n *un entier. L'ensemble des* $m \in \mathrm{M}$ *tels que* $\mathscr{E}(\pi_m, \pi'_m) \leqslant n$ *est un* G_δ *de* M.

Nous utilisons la démonstration de [8], p. 202, l. 11-26, mais il est nécessaire de la modifier légèrement. Soit $\mathscr{T}(\mathrm{H})$ l'ensemble des opérateurs traçables dans H, muni de sa structure naturelle d'espace de Banach : si $\mathrm{S} \in \mathscr{T}(\mathrm{H})$, la norme de S dans $\mathscr{T}(\mathrm{H})$ est $||\mathrm{S}||_1 = \mathrm{Tr}(\mathrm{abs}\ \mathrm{S})$, où $\mathrm{abs}\ \mathrm{S} = (\mathrm{S}^*\mathrm{S})^{1/2}$. Alors $\mathscr{L}(\mathrm{H})$ s'identifie au dual de $\mathscr{T}(\mathrm{H})$, la forme bilinéaire canonique sur $\mathscr{T}(\mathrm{H}) \times \mathscr{L}(\mathrm{H})$ étant $<\mathrm{S}, \mathrm{T}> = \mathrm{Tr}(\mathrm{ST})$. Soient $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une suite totale dans A telle que $||x_i|| \leqslant 1$ pour tout i, $(\xi_j)_{j \in \mathrm{J}}$ une suite totale dans H telle que $||\xi_j|| \leqslant 1$ pour tout j. Soit X l'espace de Banach des familles $(\lambda_{ijk})_{i \in \mathrm{I},\, j \in \mathrm{J},\, k \in \mathrm{J}}$ de nombres complexes bornés. Pour tout $m \in \mathrm{M}$, soit V_m l'application linéaire continue de $\mathscr{L}(\mathrm{H})$ dans X définie par

$$\mathrm{V}_m(\mathrm{T}) = (((\pi_m(x_i)\mathrm{T} - \mathrm{T}\pi'_m(x_i))\xi_j \mid \xi_k))_{i \in \mathrm{I},\, j \in \mathrm{J},\, k \in \mathrm{J}}.$$

Alors, $\mathscr{E}(\pi_m, \pi'_m)$ est la dimension du noyau de V_m. L'espace de Banach X est le dual de l'espace de Banach Y des familles $(\mu_{ijk})_{i \in \mathrm{I},\, j \in \mathrm{J},\, k \in \mathrm{J}}$ de nombres complexes telles que $||(\mu_{ijk})|| = \Sigma_{i \in \mathrm{I},\, j \in \mathrm{J},\, k \in \mathrm{J}} |\mu_{ijk}| < +\infty$. Pour $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathrm{H})$ et $(\mu_{ijk}) \in \mathrm{Y}$, on a

$$<(\mu_{ijk}), \mathrm{V}_m(\mathrm{T})> = \Sigma_{ijk}\mu_{ijk}((\pi_m(x_i)\mathrm{T} - \mathrm{T}\pi'_m(x_i))\xi_j|\xi_k) = \Sigma_{ijk}\mu_{ijk}((\mathrm{T}\xi_j|\pi_m(x_i^*)\xi_k) - (\mathrm{T}\pi'_m(x_i)\xi_j|\xi_k)).$$

Étant donnés deux vecteurs η et ζ de H, notons $\mathrm{R}(\eta, \zeta)$ l'opérateur $\xi \to (\xi|\zeta)\eta$. On a $||\mathrm{R}(\eta, \zeta)||_1 = ||\eta|| . ||\zeta||$, et, pour tout $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathrm{H})$,

$$\mathrm{Tr}\mathrm{TR}(\eta, \zeta) = (\mathrm{TR}(\eta, \zeta)\zeta|\zeta) = (\mathrm{T}\eta|\zeta).$$

Donc

$$\begin{aligned} <(\mu_{ijk}), \mathrm{V}_m(\mathrm{T})> &= \Sigma_{ijk}\mu_{ijk}\mathrm{Tr}(\mathrm{TR}(\xi_j, \pi_m(x_i^*)\xi_k) - \mathrm{TR}(\pi'_m(x_i)\xi_j, \xi_k)) \\ &= <\Sigma_{ijk}\mu_{ijk}(\mathrm{R}(\xi_j, \pi_m(x_i^*)\xi_k) - \mathrm{R}(\pi'_m(x_i)\xi_j, \xi_k)), \mathrm{T}>. \end{aligned}$$

Ainsi, V_m est l'application linéaire transposée d'une application linéaire continue U_m de Y dans $\mathscr{T}(H)$, définie par

$$U_m((\mu_{ijk})) = \Sigma_{ijk}\mu_{ijk}(R(\xi_j, \pi_m(x_i^*)\xi_k) - R(\pi'_m(x_i)\xi_j, \xi_k))$$

et $\mathscr{E}(\pi_m, \pi'_m)$ est la codimension de $\overline{U_m(Y)}$. Pour prouver le lemme 3, il suffit, en vertu du lemme 2, de prouver la continuité de l'application $m \to U_m$ de M dans $\mathscr{L}(Y, \mathscr{T}(H))$ muni de la topologie de la convergence simple. Pour $(\mu_{ijk}) \in Y$ fixé, montrons donc que $\Sigma_{ijk}\mu_{ijk}(R(\xi_j, \pi_m(x_i^*)\xi_k) - R(\pi'_m(x_i)\xi_j^*, \xi_k)) \in \mathscr{T}(H)$ dépend continûment de m. Comme

$$||\mu_{ijk}(R(\xi_j, \pi_m(x_i^*)\xi_k) - R(\pi'_m(x_i)\xi_j, \xi_k))||_1 \leqslant 2|\mu_{ijk}|,$$

il suffit de montrer que chaque terme $R(\xi_j, \pi_m(x_i^*)\xi_k)$, $R(\pi'_m(x_i)\xi_j, \xi_k)$ dépend continûment de m. Or, les applications $m \to \pi_m(x_i^*)\xi_j$ et $m \to \pi'_m(x_i)\xi_j$ de M dans H sont continues, et l'application $(\eta, \zeta) \to R(\eta, \zeta)$ de $H \times H$ dans $\mathscr{T}(H)$ est continue en vertu de l'égalité $||R(\eta, \zeta)||_1 = ||\eta||.||\zeta||$.

LEMME 4. — *Soient* A *une* C*-*algèbre séparable,* H *un espace hilbertien séparable. L'espace topologique* $\mathscr{I}_H(A)$ *des représentations irréductibles non triviales de* A *dans* H *est polonais.*

L'ensemble des représentations irréductibles de A dans H est l'ensemble des $\rho \in \mathscr{R}_H(A)$ telles que $\mathscr{E}(\rho, \rho) \leqslant 1$. Appliquons le lemme 3 en prenant $M = \mathscr{R}_H(A)$, $\pi_\rho = \pi'_\rho = \rho$ pour toute $\rho \in \mathscr{R}_H(A)$. On voit que cet ensemble est un G_δ dans $\mathscr{R}_H(A)$. Cet ensemble, éventuellement privé d'un point (la représentation triviale lorsque $\dim H = 1$) n'est autre que $\mathscr{I}_H(A)$. Donc $\mathscr{I}_H(A)$ est un G_δ dans l'espace polonais $\mathscr{R}_H(A)$ et par suite est polonais ([1], § 6, th. 1).

LEMME 5. — *Soient* A *une* C*-*algèbre séparable,* H *un espace hilbertien séparable, et* $\pi_0 \in \mathscr{I}_H(A)$. *L'ensemble des* $\pi \in \mathscr{I}_H(A)$ *qui sont équivalentes à* π_0 *est un* F_σ *dans* $\mathscr{I}_H(A)$.

Considérons l'ensemble des $\pi \in \mathscr{R}_H(A)$ telles que $\mathscr{E}(\pi_0, \pi) \leqslant 0$. D'après le lemme 3, c'est un G_δ dans $\mathscr{R}_H(A)$. Donc, l'ensemble des $\pi \in \mathscr{I}_H(A)$ inéquivalentes à π_0 est un G_δ dans $\mathscr{I}_H(A)$. D'où le lemme.

LEMME 6. — *Soient* A *une* C*-*algèbre primitive séparable,* H *un espace hilbertien séparable de dimension infinie, et* $\mathscr{S}$ *une partie fermée de* $\mathscr{I}_H(A)$, *saturée pour l'équivalence, distincte de* $\mathscr{I}_H(A)$. *Alors* $\mathscr{S}$ *est rare dans* $\mathscr{I}_H(A)$.

(Rappelons [1] qu'une partie d'un espace topologique est dite *rare* si son adhérence est sans point intérieur, *maigre* si elle est réunion dénombrable d'ensembles rares.)

Soit $B \subset \hat{A}$ l'ensemble des classes de représentations irréductibles de A de noyau $\{0\}$. Cet ensemble est non vide puisque A est primitive, et tout point de B est partout dense dans $\hat{A}$. Si une représentation de B est de dimension finie, A est de dimension finie, et le lemme est trivial car $\mathscr{I}_H(A) = \emptyset$. On peut donc supposer $B \subset \hat{A}_H$. Soit $F = \varphi(\mathscr{S})$ l'image canonique de $\mathscr{S}$ dans $\hat{A}_H$. C'est une partie fermée dans $\hat{A}_H$, distincte de $\hat{A}_H$. Soit U l'intérieur de F dans $\hat{A}_H$. Si $U \neq \emptyset$, tout point de B appartient à U, donc $\overline{U} = \hat{A}_H$ et $F = \hat{A}_H$, contrairement à l'hypothèse. Donc F est rare dans $\hat{A}_H$, de sorte que $\mathscr{S}$ est rare dans $\mathscr{I}_H(A)$.

Lemme 7. — *Soient* A *une* C^*-*algèbre primitive séparable,* H *un espace hilbertien séparable de dimension infinie, et* $\mathscr{B}$ *une partie borélienne de* $\mathscr{I}_H(A)$, *saturée pour l'équivalence. Alors,* $\mathscr{B}$ *est maigre ou de complémentaire maigre.*

Soit $D(\mathscr{B})$ l'ensemble des $\pi \in \mathscr{I}_H(A)$ telles que tout voisinage de π rencontre $\mathscr{B}$ suivant un ensemble non maigre dans $\mathscr{I}_H(A)$. Puisque l'équivalence est définie par un groupe d'homéomorphismes de $\mathscr{I}_H(A)$, $D(\mathscr{B})$ est saturé pour l'équivalence. D'autre part, il est clair que $D(\mathscr{B})$ est fermé. D'après le lemme 6, $D(\mathscr{B})$ est rare ou égal à $\mathscr{I}_H(A)$. Enfin, la différence symétrique de $\mathscr{B}$ et $D(\mathscr{B})$ est maigre ([7], §§ 10-11). Si $D(\mathscr{B}) = \mathscr{I}_H(A)$, le complémentaire de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{I}_H(A)$ est maigre. Si $D(\mathscr{B})$ est rare, $\mathscr{B}$ est la réunion d'un ensemble maigre et d'un ensemble rare, donc est maigre.

Lemme 8. — *Soient* A *une* C^*-*algèbre primitive séparable,* H *un espace hilbertien séparable de dimension infinie. On suppose la structure borélienne de Mackey sur* $\hat{A}_H$ *dénombrablement séparée. Alors toutes les représentations irréductibles de noyau* $\{0\}$ *de* A *sont équivalentes.*

Par hypothèse, il existe une suite $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots$ de parties boréliennes de $\mathscr{I}_H(A)$ saturées pour l'équivalence et telles que toute classe d'équivalence $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{I}_H(A)$ soit l'intersection des $\mathscr{B}_i$ qui la contiennent. Si $\mathscr{C}$ est maigre, les $\mathscr{B}_i$ contenant $\mathscr{C}$ ne peuvent être toutes de complémentaires maigres (sinon, $\mathscr{C}$ serait maigre et de complémentaire maigre, contrairement au fait que $\mathscr{I}_H(A)$ est un espace polonais). Donc, compte tenu du lemme 7, $\mathscr{C}$ est contenue dans une $\mathscr{B}_i$ maigre. Si toutes les classes d'équivalence dans $\mathscr{I}_H(A)$ étaient maigres, $\mathscr{I}_H(A)$ serait donc réunion de celles des parties $\mathscr{B}_i$ qui sont maigres, contrairement au fait que $\mathscr{I}_H(A)$ est un espace polonais. Donc, il existe une classe d'équivalence $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{I}_H(A)$ qui est non maigre. Or, $\mathscr{C} = \mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2 \cup \ldots$, où les $\mathscr{F}_i$ sont fermés dans $\mathscr{I}_H(A)$ (lemme 5). Les $\mathscr{F}_i$ ne peuvent être tous rares. Donc $\mathscr{C}$ contient une partie ouverte non vide $\mathscr{U}$. Le saturé de $\mathscr{U}$ est nécessairement $\mathscr{C}$ (puisque $\mathscr{C}$ est une classe d'équivalence), donc $\mathscr{C}$ est ouverte. Donc, il existe dans $\hat{A}_H$ un point ouvert ρ_0. Reprenons l'ensemble $B \subset \hat{A}$ des classes de représentations irréductibles de A de noyau $\{0\}$, ensemble considéré dans la démonstration du lemme 6. On peut supposer A de dimension infinie (sinon le lemme est trivial), et on a alors $B \subset \hat{A}_H$. Comme B est partout dense dans $\hat{A}_H$ et que $\{\rho_0\}$ est ouvert, on a $\rho_0 \in B$. En outre, la topologie induite sur B par celle de $\hat{A}$ est la topologie la moins fine ; donc $B = \{\rho_0\}$, ce qui prouve le lemme.

Fin de la démonstration du théorème 1. Soit A une C^*-algèbre séparable, et supposons la structure borélienne de Mackey sur $\hat{A}$ dénombrablement séparée. Soit I un idéal primitif de A. Alors $(A/I)\hat{}$ s'identifie à une partie fermée de $\hat{A}$. Il est immédiat que la structure borélienne de Mackey sur $(A/I)\hat{}$ est induite par celle de $\hat{A}$, donc est dénombrablement séparée. D'après le lemme 8, toutes les représentations irréductibles de noyau I de A sont équivalentes. Autrement dit, $\hat{A}$ est un T_0-espace, de sorte que [3] A est GCR.

REMARQUE. — Soit G un groupe localement compact séparable. Si la structure borélienne de Mackey sur le dual $\hat{G}$ de G est dénombrablement séparée, le th. 1 montre que $\hat{G}$ est standard et que la structure borélienne de Mackey n'est autre que la structure borélienne sous-jacente à la topologie de $\hat{G}$.

Les résultats du présent article ont été aussi obtenus par James Glimm, dans un mémoire à paraître.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, chap. IX, 2e éd., Paris, Hermann, 1958.
[2] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, chap. III, IV, V, Paris, Hermann, 1955.
[3] J. DIXMIER, Sur les C*-algèbres, *Bull. Soc. math. France*, 88 (1960), pp. 95-112.
[4] J. M. G. FELL, The dual spaces of C*-algebras, à paraître aux *Trans. Amer. Math. Soc.*
[5] J. M. G. FELL, *C*-algebras with smooth dual*, à paraître.
[6] I. KAPLANSKY, The structure of certain operator algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 70 (1951), pp. 219-255.
[7] C. KURATOWSKI, Topologie I, 4e éd., *Monografie Mat.*, t. 20, Varsovie, 1958.
[8] G. W. MACKEY, Induced representations of locally compact groups II, *Annals of Math.*, 58 (1953), pp. 193-221.
[9] G. W. MACKEY, Borel structure in groups and their duals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 85 (1957), pp. 134-165.

Reçu le 19 janvier 1960.